Transformadas de Fourier y de Laplace

1. Introducción

Los dominios del tiempo y de la frecuencia son formas alternativas de representar las señales.

Los problemas que plantea el procesamiento de señales pueden tratarse en el dominio del tiempo con técnicas clásicas de ecuaciones diferenciales (señales analógicas) o ecuaciones en diferencias (señales discretas), mientras que en el dominio de la frecuencia estos problemas se traducen en ecuaciones algebraicas generalmente más sencillas de resolver.

Las herramientas que establecen las relaciones matemáticas entre los dominios del tiempo y de la frecuencia se llaman *transformadas*.

Dos de las más usadas son la transformada de Fourier y la transformada de Laplace y ambas están relacionadas. *La transformada de Fourier se usa para representar en el dominio de la frecuencia señales continuas (analógicas) no periódicas y describe el espectro continuo de una señal no periódica.*

2. La transformada de Fourier

La transformada de Fourier puede interpretarse como una *"versión continua"* del concepto de serie de Fourier para funciones no periódicas.

Recuerda que el espectro de una señal f, periódica de período T, es el conjunto de pares $\{(n/T, c_n) : n \in \mathbb{Z}\}$, donde $c_n = \widehat{f}(n/T)$ son los coeficientes de Fourier complejos de f.

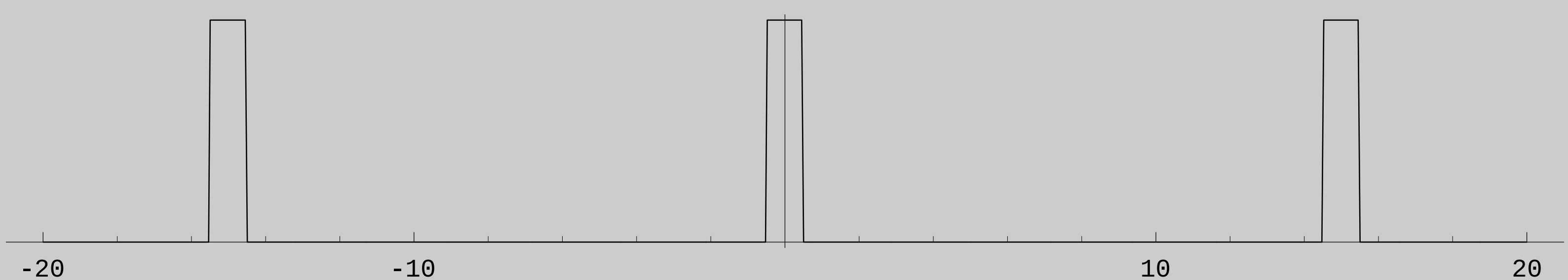
La clave de lo que sigue consiste en interpretar una función no periódica como el límite de una función periódica cuyo período, T, se hace arbitrariamente grande, es decir, $T \to +\infty$.

Observa que cuanto mayor es el período T más cerca están los puntos del espectro de forma que cuando $T \to +\infty$ podemos considerar que el espectro se convierte en una curva continua y la función $\widehat{f}$ en una función definida en $\mathbb{R}$ cuya gráfica es dicha curva.

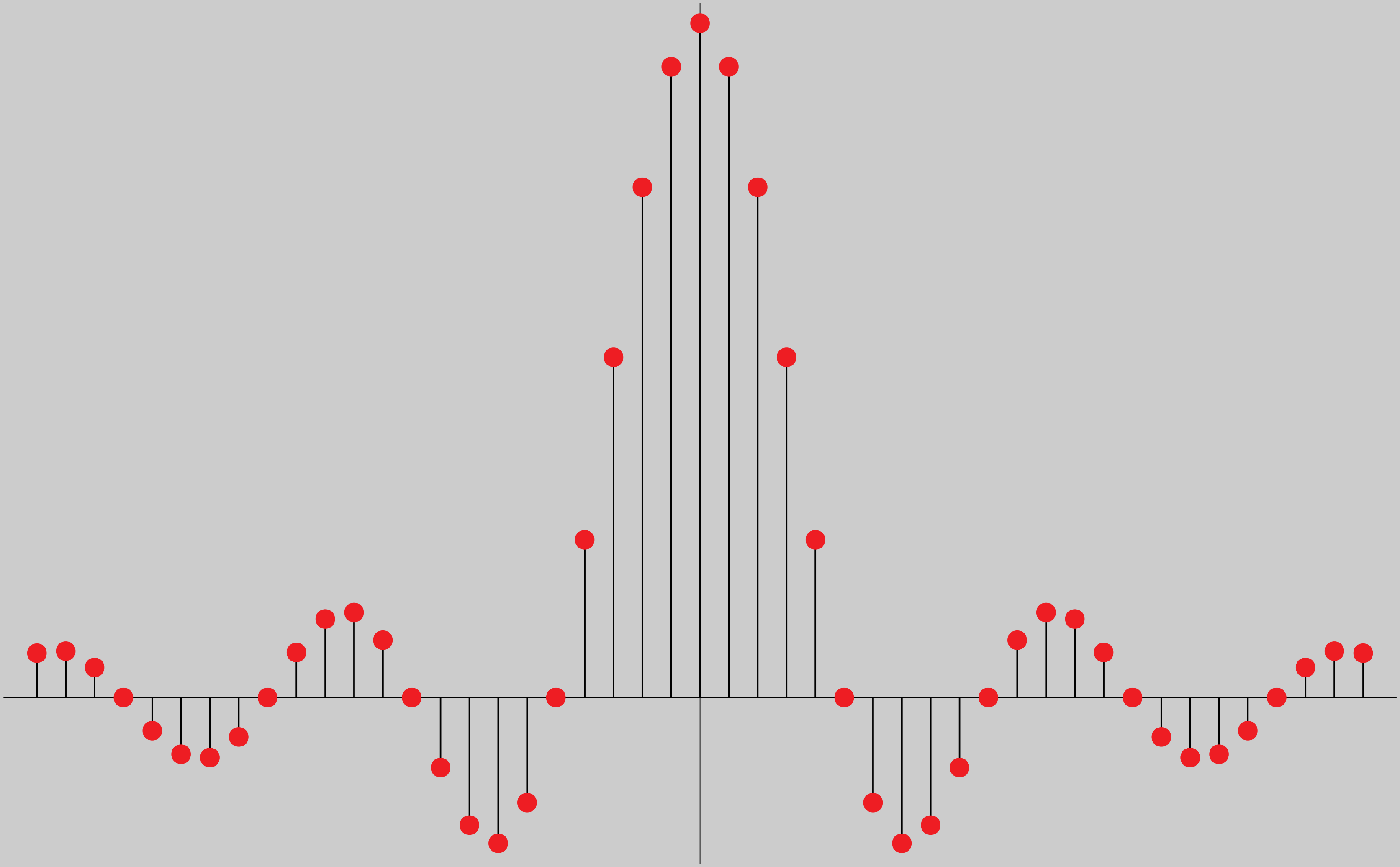
Consideremos la función “pulso rectangular” definida por:

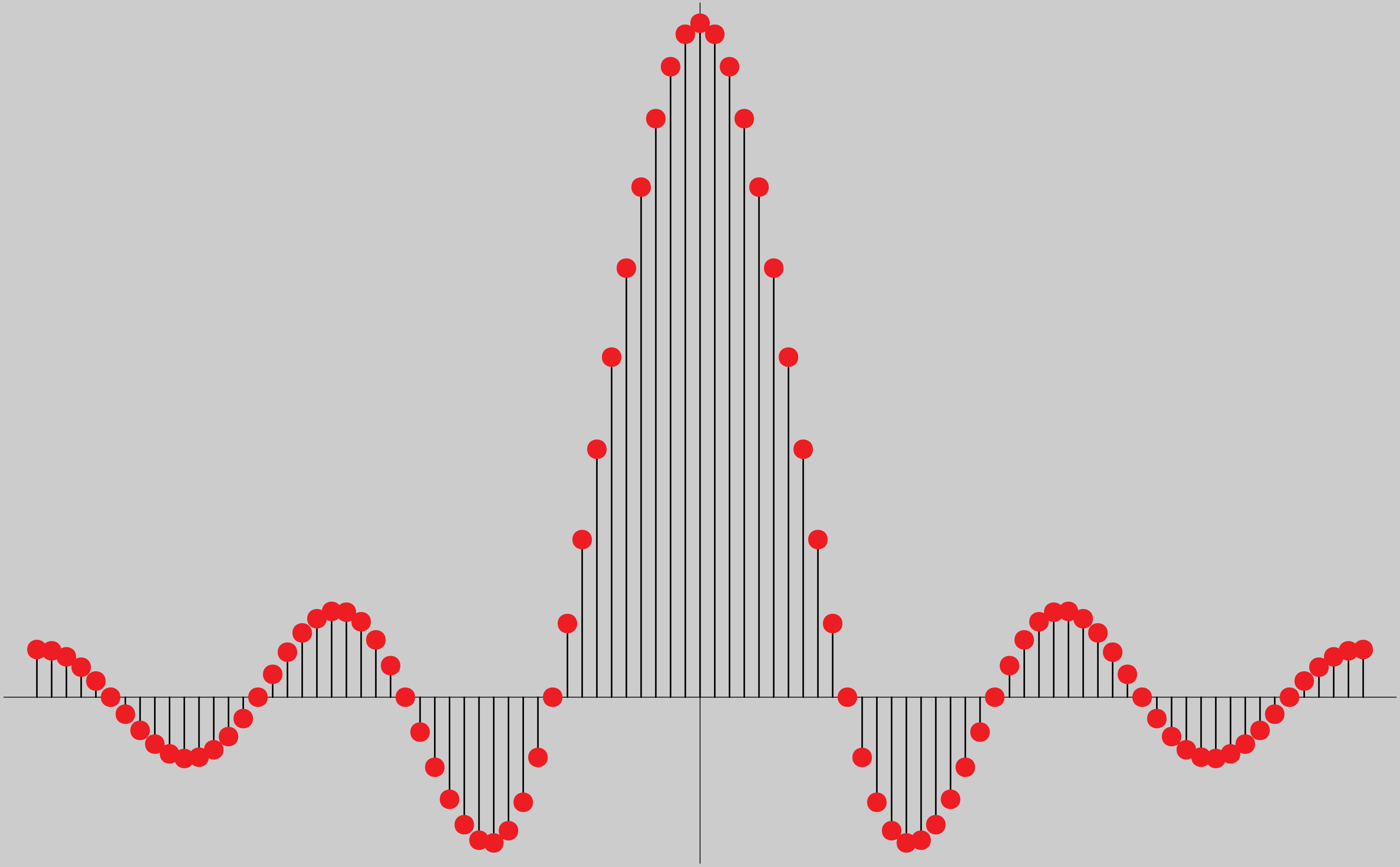
$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1/2 \\ 0 & |t| \geqslant 1/2 \end{cases}$$

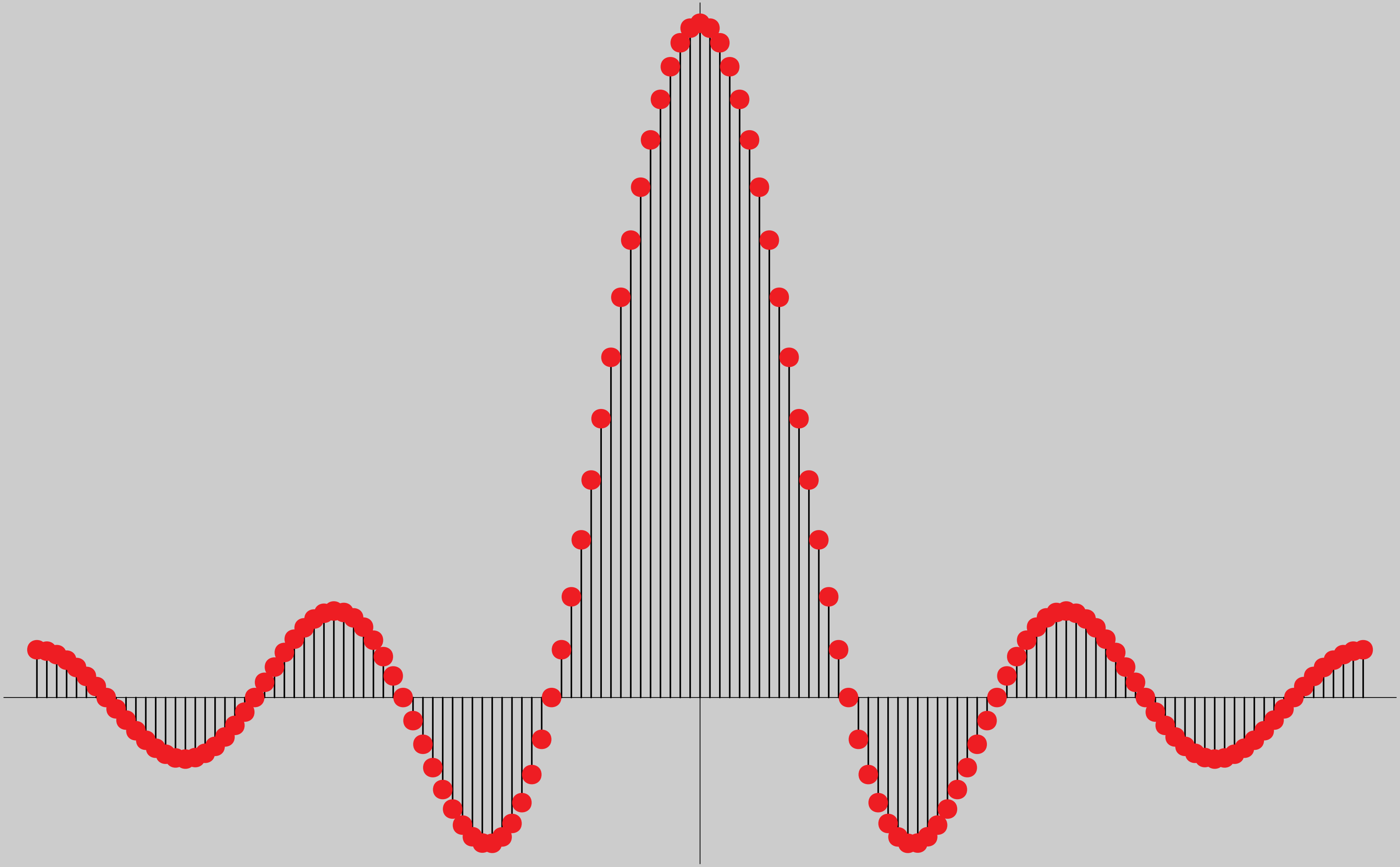
Es claro que Π no es una función periódica y, por ello, no tiene una serie de Fourier asociada. No obstante, podemos considerar versiones periódicas de Π repitiendo su parte no nula separada regularmente por grandes intervalos en los que la función es cero. Aquí tienes la gráfica de la periodización de Π con período 15.


-20
-10
10
20

Como las periodizaciones de Π son funciones pares y reales sus coeficientes de Fourier son reales. Aquí tienes los gráficos de los espectros correspondientes a las periodizaciones de Π con períodos 5, 10 y 20.







Calculemos los coeficientes de Fourier de la periodización de Π con período T.

$$\widehat{\Pi}\left(\frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{e}^{-2\pi i n t/T}\,\Pi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{-2\pi i n t/T}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{T}\left[\frac{1}{-2\pi i n/T}\,\mathrm{e}^{-2\pi i n t/T}\right]_{t=-1/2}^{t=1/2} = \frac{1}{2\pi i n}\left(\mathrm{e}^{\pi i n/T} - \mathrm{e}^{-\pi i n/T}\right) = \frac{1}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{T}\right)$$

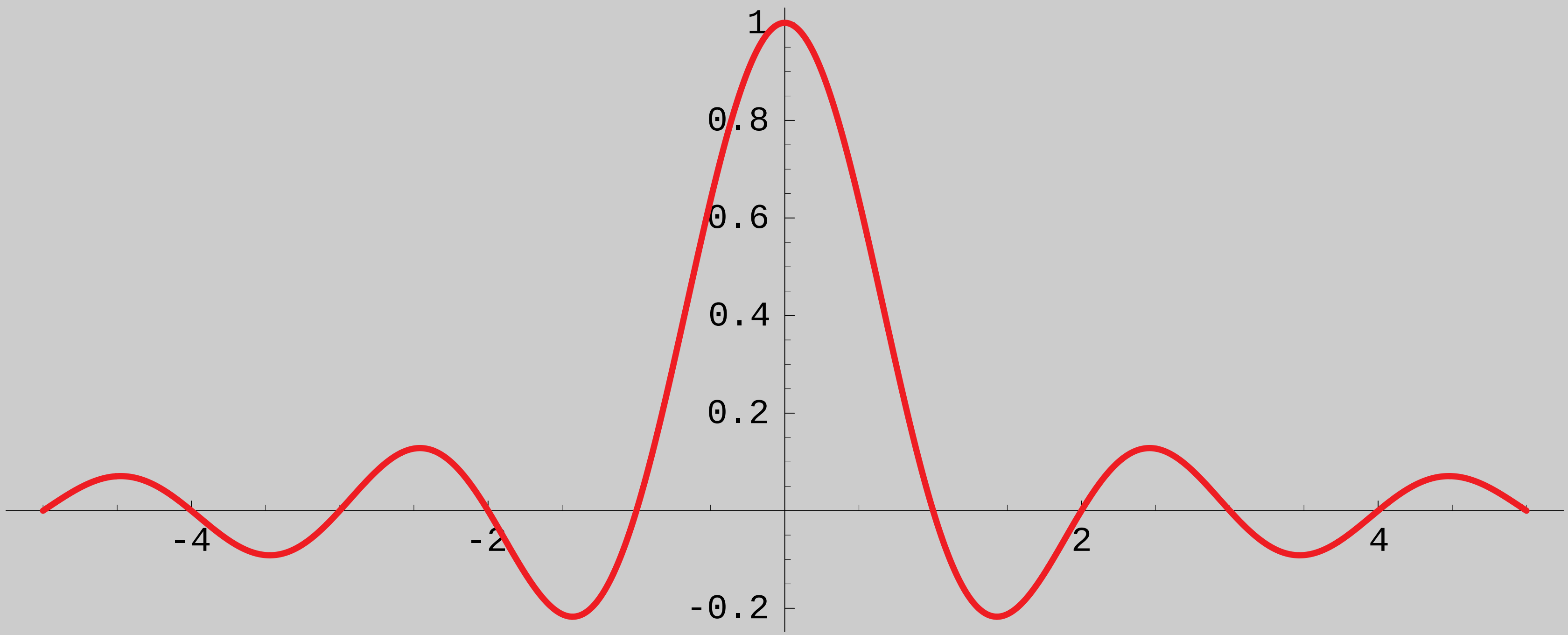
Deducimos que

$$\int_{-T/2}^{T/2} \mathrm{e}^{-2\pi i n t/T}\,\Pi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{T}\right)}{\frac{\pi n}{T}}$$

Haciendo ahora $T \to +\infty$ en esta expresión podemos interpretar que la variable discreta n/T se convierte en una variable continua s con lo que resulta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\pi i s t}\,\Pi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\operatorname{sen}(\pi s)}{\pi s}$$

Bien, acabamos de obtener la transformada de Fourier de la función Π. Aquí puedes ver su gráfica.


1
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.2
-4
-2
2
4

Definición. La transformada de Fourier de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es la función $\widehat{f} = \mathcal{F}f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$\widehat{f}(s) = \mathcal{F}f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\pi i s t} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (s \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

2.0.1. Comentarios

- Usaremos las notaciones $\widehat{f}$ y $\mathcal{F}f$ para representar la transformada de Fourier de la señal f. A veces conviene escribir $\mathcal{F}f$ en la forma $\mathcal{F}(f)$ para indicar claramente que $\mathcal{F}f$ es la transformada de Fourier de la función f.
- El parámetro "s" en la definición 1 se interpreta como frecuencias. La función $\widehat{f}$ se interpreta como la representación de la señal f en el dominio de la frecuencia.
- La transformada de Fourier convierte una señal, $f(t)$, dada en el dominio del tiempo en otra señal, $\widehat{f}(s)$, en el dominio de la frecuencia.
- Representaremos por $L^1(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tales que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$. Para que la definición 1 tenga sentido es condición suficiente que $f \in L^1(\mathbb{R})$.

2.1. La transformada inversa de Fourier

La transformada de Fourier permite analizar una señal f por sus componentes de frecuencia.

El conjunto $\Omega(f) = \left\{s \in \mathbb{R} : \widehat{f}(s) \neq 0\right\}$ se llama espectro continuo de la señal f. Cada frecuencia $s \in \Omega(f)$ tiene como amplitud $\left|\widehat{f}(s)\right|$ y su fase es $\arg \widehat{f}(s)$.

La señal f queda caracterizada completamente por $\widehat{f}$ en el sentido de que el conocimiento de $\widehat{f}$ permite recuperar f. Veamos de manera informal cómo puede hacerse esto.

Consideremos que f es una señal que se anula fuera de un intervalo acotado lo que permite considerar su periodización para valores grandes del período T de manera que $f(t)=0$ para $|t|>T/2$. Desarrollemos dicha periodización en serie de Fourier:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \,\mathrm{e}^{2\pi i n t/T}$$

Teniendo en cuenta que $f(t)=0$ para $|t|>T/2$, los coeficientes de Fourier de f vienen dados por:

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi i n t/T}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-2\pi i n t/T}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\widehat{f}\left(\frac{n}{T}\right)$$

Pongamos $s_n=n/T$. Sustituyendo el valor de c_n en la serie obtenemos:

$$f(t)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(s_n)\,\mathrm{e}^{2\pi i s_n t}$$

Como los puntos s_n están igualmente espaciados una distancia $1/T$, podemos interpretar esta suma como una suma de Riemann de la integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(s)\,\mathrm{e}^{2\pi i s t}\,\mathrm{d}s$$

Cuando $T \to +\infty$ podemos esperar que se tenga la igualdad:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s)\, e^{2\pi i s t}\, ds$$

Llegamos así a la siguiente definición.

Definición. La transformada inversa de Fourier de una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es la función $\check{g} = \mathcal{F}^{-1}g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$\check{g}(t) = \mathcal{F}^{-1}g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i s t} g(s)\, ds \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{2}$$

Tenemos también el siguiente teorema.

Teorema de inversión de Fourier. Si f es una señal continua tal que $f \in L^1(\mathbb{R})$ y también $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, se verifica que:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i s t}\, \widehat{f}(s)\, ds \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{3}$$

La igualdad 1 se llama la *ecuación de análisis* y la igualdad 3 se llama *ecuación de síntesis*. Observa que la ecuación de síntesis permite reconstruir una señal no periódica a través de sus componentes de frecuencia y puede verse como una "versión continua" de la representación de una señal periódica por su serie de Fourier.

Explícitamente, la igualdad 3 afirma que:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\pi i s u} f(u)\,\mathrm{d}u \right] \mathrm{e}^{2\pi i s t}\,\mathrm{d}s \tag{4}$$

Evidentemente, es más cómodo escribir esta igualdad en la forma:

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F} f) \tag{5}$$

Es notable la simetría que hay entre la transformada de Fourier y su inversa: solamente se diferencian por un cambio de signo en la exponencial. De hecho, se verifica también la igualdad:

$$g = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1} g) \tag{6}$$

La transformada de Fourier es una operación que regulariza y suaviza las funciones. Esto es lo que dice el siguiente resultado.

Teorema. La transformada de Fourier de una señal integrable, $f \in L^1(\mathbb{R})$, es una función continua, acotada y $\lim\limits_{t \to \pm\infty} \mathcal{F} f(s) = 0$.

2.2. Propiedades de la transformada de Fourier

Linealidad. La transformada de Fourier es un operador lineal. Esto quiere decir que si α y β son números y f, g señales, se verifica la igualdad:

$$\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F} f + \beta \mathcal{F} g$$

Propiedades de simetría.

De las definiciones dadas para la transformada de Fourier y su inversa:

$$\mathcal{F} f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\pi i s t} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi s t) f(t)\,\mathrm{d}t - i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(2\pi s t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{F}^{-1} f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{2\pi i s t} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi s t) f(t)\,\mathrm{d}t + i \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(2\pi s t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

y teniendo en cuenta que el coseno es par y el seno impar, se deducen las siguientes propiedades de simetría.

1. $\mathcal{F} f(s) = \mathcal{F}^{-1} f(-s)$.

2. **Regla de inversión**. $\mathcal{F}(\mathcal{F} f)(s) = f(-s)$.

3. Si la función f es par entonces se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(2\pi\, s\, t) f(t)\, \mathrm{d}t = \lim_{a\to+\infty} \int_{-a}^{a} \operatorname{sen}(2\pi\, s\, t) f(t)\, \mathrm{d}t = 0$$

   por lo que

$$\mathfrak{F}f(s) = \mathfrak{F}^{-1}f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi\, s\, t) f(t)\, \mathrm{d}t = 2\int_{0}^{\infty} \cos(2\pi\, s\, t) f(t)\, \mathrm{d}t$$

   y la transformada de Fourier de f coincide con su transformada inversa y es una función par.

4. Análogamente, si f es impar su transformada de Fourier también es impar y:

$$\mathfrak{F}f(s) = -\mathfrak{F}^{-1}f(s) = i\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sen}(2\pi\, s\, t) f(t)\, \mathrm{d}t = 2i\int_{0}^{\infty} \operatorname{sen}(2\pi\, s\, t) f(t)$$

5. Si f es real entonces $\mathfrak{F}f(-s) = \overline{\mathfrak{F}f(s)}$.

6. Si f es real y par su transformada de Fourier también es real y par.

7. Si f es real e impar su transformada de Fourier es impar y toma valores imaginarios puros.

Las siguientes dos propiedades se obtienen fácilmente con un sencillo cambio de variable.

Traslación en el tiempo. Dado un número $a \in \mathbb{R}$ y una señal f, definimos la señal $\tau_a f$ por:

$$\tau_a f(t) = f(t-a)$$

Se verifica que:

$$\widehat{\tau_a f}\,(s) = \mathrm{e}^{-2\pi i a s}\,\widehat{f}(s)$$

Es decir, una traslación en el tiempo produce un cambio de fase en la transformada.

Cambio de escala o dilatación. Dado un número $a \in \mathbb{R}^*$ y una señal f, definimos la señal $\delta_a f$ por:

$$\delta_a f(t) = f(at)$$

Se verifica que:

$$\widehat{\delta_a f}\,(s) = \frac{1}{|a|}\widehat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$$

Es decir una dilatación ($a > 1$) o una compresión ($a < 1$) en el dominio del tiempo se corresponde con una compresión o dilatación en el dominio de la frecuencia más un cambio de escala.

Propiedad de modulación. Dado $a \in \mathbb{R}$, y una señal f, se verifica que la transformada de Fourier de la función $g(t) = \mathrm{e}^{2\pi iat} f(t)$ es la función $\tau_a \widehat{f}$.

Esta propiedad es inmediata pues:

$$\widehat{g}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\pi ist} f(t)\,\mathrm{e}^{2\pi iat}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\pi i(s-a)t} f(t)\,\mathrm{d}t = \widehat{f}(s-a)$$

La aplicación de la transformada de Fourier para resolver ecuaciones diferenciales se basa en la siguiente propiedad.

Propiedad de derivación.

$$\mathcal{F}(f')(s) = 2\pi is\mathcal{F}f(s) \qquad \mathcal{F}(-2i\pi t f(t))(s) = (\mathcal{F}f)'(s)$$

2.3. Ejemplos

La función pulso rectangular.

Es la función dada por

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 1/2 \\ 0 & |t| \geqslant 1/2 \end{cases}$$

Como se trata de una función par su transformada de Fourier viene dada por:

$$\widehat{\Pi}(s) = 2\int_0^{\infty} \Pi(t)\cos(2\pi s t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{1/2} \cos(2\pi s t)\,\mathrm{d}t = 2\left[\frac{\operatorname{sen}(2\pi s t)}{2\pi s}\right]_{t=0}^{t=1/2} = \frac{\operatorname{sen}(\pi s)}{\pi s}$$

La función “cardinal seno”.

Es la función dada para todo $t \in \mathbb{R}$ por

$$\operatorname{senc}(t) = \frac{\operatorname{sen}(\pi t)}{\pi t}$$

por supuesto, $\operatorname{senc}(0) = 1$.

La transformada de Fourier de esta función se deduce fácilmente de que, según acabamos de ver, $\widehat{\Pi} = \operatorname{senc}$ y, como la función Π es par, obtenemos

$$\mathfrak{F}\operatorname{senc} = \mathfrak{F}(\mathfrak{F}\Pi) = \mathfrak{F}(\mathfrak{F}^{-1}\Pi) = \Pi.$$

Decaimiento exponencial truncado.

Es la función dada por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ e^{-at}, & t > 0 \end{cases}$$

Podemos calcular su transformada de Fourier directamente:

$$\widehat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i s t} f(t)\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{(-2\pi i s - 1)t}\, dt = \left[-\frac{e^{-t} e^{-2\pi i s}}{1 + 2\pi i s} \right]_{t=0}^{t\to+\infty} = \frac{1}{1 + 2\pi i s}$$

La función de Laplace.

Es la función dada por

$$g(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$$

Para calcular su transformada de Fourier observamos que $g(t) = f(t) + f(-t)$ donde f es el decaimiento exponencial truncado. Deducimos que:

$$\widehat{g}(s) = \widehat{f}(s) + \widehat{f}(-s) = \frac{1}{1+2\pi i s} + \frac{1}{1-2\pi i s} = \frac{2}{1+4\pi^2 s^2}$$

La función gausiana unidad.

Es la función definida por:

$$f(t) = \mathrm{e}^{-\pi t^2}$$

Esta función tiene la notable propiedad de ser invariante para la transformada de Fourier: su transformada de Fourier es ella misma. Para calcularla podemos usar el hecho de que $f'(t) = -2\pi t f(t)$ y tomar transformadas de Fourier en ambos lados de esta igualdad con lo que, en virtud de la propiedad de derivación, resulta:

$$2\pi i s \widehat{f}(s) = \frac{1}{i}\widehat{f'}(s)$$

Es decir

$$\widehat{f'}(s) + 2\pi s \widehat{f}(s) = 0$$

Deducimos de aquí que la función $\widehat{f}(s)\mathrm{e}^{\pi s^2}$ tiene derivada nula por lo que

$$\widehat{f}(s) = \widehat{f}(0)\mathrm{e}^{-\pi s^2} = \mathrm{e}^{-\pi s^2} = f(s)$$

Donde hemos usado el resultado bien conocido $\widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi t^2}\,\mathrm{d}t = 1.$